

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Edson Gomes da Fonseca

**Modelagem na Educação Matemática: Uma abordagem sobre o
fenômeno natural do movimento das marés através da
trigonometria**

João Pessoa – PB

2014

Edson Gomes da Fonseca

**Modelagem na Educação Matemática: Uma abordagem sobre o
fenômeno natural do movimento das Marés através da
trigonometria**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Licenciatura em
Matemática da Universidade Federal da Paraíba
como requisito parcial para obtenção do título de
licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos
Santos

João Pessoa – PB

2014

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

F676m Fonseca, Edson Gomes da.

Modelagem na educação matemática : uma abordagem sobre o fenômeno natural do movimento das marés através da trigonometria / Edson Gomes da Fonseca. - João Pessoa, 2014.

53 f. : il.

Orientação: Eduardo Gonçalves dos Santos.
Monografia (Graduação) - UFPB/CCEN.

1. Modelagem matemática. 2. Trigonometria. 3. Fenômeno das marés. I. Santos, Eduardo Gonçalves dos. II. Título.

UFPB/BC

**Modelagem na Educação Matemática: Uma abordagem sobre o
fenômeno natural do movimento das Marés através da
trigonometria**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos

Aprovado em: 22/08/2016

COMISSÃO EXAMINADORA

Eduardo Gonçalves dos Santos

Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos (Orientador)

Antônio Sales da Silva

Prof. Ms. Antônio Sales da Silva (Examinador)

Valdenilza Ferreira da Silva

Prof.^a. Dr.^a. Valdenilza Ferreira da Silva (Examinadora)

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, agradeço pelo carinho e a educação que me deram durante toda minha vida e também aos professores e amigos desta academia pela força e principalmente pelo companheirismo de todos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado saúde e força para superar os obstáculos.

Agradeço à minha família pelo suporte, incentivo e apoio incondicional.

Agradeço aos professores, em especial, ao meu orientador que foi um dos melhores professores que tive durante a graduação, pela amizade, dedicação, atenção, e pela imensa paciência tida comigo durante o desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço aos meus amigos do curso de Licenciatura em Matemática que estiveram comigo nesses quatro anos de curso e pelas grandes amizades conquistadas neste longo percurso.

Aos professores com os quais trabalhei durante essa jornada, que foram fundamentais para minha formação acadêmica.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

Epígrafe

Aprender. Desaprender. Reaprender...

“Somos transformados a partir dos encontros, desde que estejamos abertos e livres para sermos impactados pela ideia e sentimento do outro”.

(Roberta Recinella)

RESUMO

Esta monografia apresenta um estudo sobre a utilização da Modelagem Matemática nas aulas de Matemática e suas contribuições enquanto metodologia de ensino e aprendizagem desta ciência. A partir de autores que defendem a Modelagem no ensino. Em consonância com esta metodologia apresentamos uma proposta de modelagem que viabiliza a compreensão do movimento das marés, através de modelo matemático utilizando a função trigonométrica e os estudos paramétricos e comportamentais da senóide.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Trigonometria; Fenômeno das marés.

ABSTRACT

This paper presents a study on the use of Mathematical Modeling in Mathematics classes and their contributions while teaching methodology and learning this science. From authors who advocate teaching modeling. In line with this methodology we present a modeling approach that enables the understanding of tidal movement, through mathematical model using the trigonometric function and parametric and behavioral studies of the sinusoid.

Key-words: Mathematical Modeling; trigonometry; Phenomenon of tides.

ABREVIATURAS E SIGLAS

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional

MEC – Ministério da Educação e Cultura

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Esquema do processo da modelagem matemática.	18
Figura 2: Dinâmica da modelagem matemática	21
Figura 3: Circulo unitário	30
Figura 4: Circulo trigonometrico envolvido pela reta Real	31
Figura 5: Projeção ortogonal	32
Figura 6: Curva da função seno $f(t) = \text{sen}(t)$	34
Figura 7: Curva da função cosseno $f(t) = \text{cos}(t)$	34
Figura 8: Gráfico da função $f(t) = \text{sen}(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$	34
Figura 9: Gráfico da função $f(t) = \text{cos}(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$	35
Figura 10: Esquema representativo da situação das marés.....	37
Figura 11: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}x$ e os pontos conhecidos para a situação da maré alta e baixa durante 24 horas.	39
Figura 12: Influência do parâmetro a na função $f(x) = a \text{sen}x$	39
Figura 13: Grafico da função $h(t) = 0,9 \text{sen}t$	40
Figura 14: Investigação do parâmetro b da função $f(x) = b + \text{sen}x$	41
Figura 15: Gráfico da função $h(t) = 1,3 + 0,9 \text{sen}t$	41
Figura 17: Investigação do parâmetro c da função $f(x) = \text{sen}(cx)$	42
Figura 19: Grafico da função $h(t) = 1,3 + 0,9 \text{sen}(\frac{\pi}{6,008}t)$	43
Figura 20: Investigação do parâmetro d da função $f(x) = \text{sen}(x + d)$	43
Figura 21: Gráfico da função $h(t) = 1,3 + 0,9 \text{sen}(\frac{\pi}{6,008}t + \frac{265\pi}{1109})$	44
Figura 22: Conjugado das forças de gravitação da Lua e do Sol.	52
Figura 23: Comportamento gráfico das marés 1	53
Figura 24: Comportamento gráfico das marés 2	53

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Sinais das Funções Seno e Cosseno.	33
Tabela 2: Comportamento dos gráficos das Funções Seno e Cosseno.....	33
Tabela 3: Comportamento das marés no dia 27/07/2014 em João Pessoa.....	34
Tabela 4: Comportamento das marés no dia 27/07/2014 em João Pessoa após os ajustes das médias.....	36

SUMÁRIO

COMISSÃO EXAMINADORA	3
ABREVIATURAS E SIGLAS	9
LISTA DE FIGURAS	10
1 Introdução.....	13
1.1 Objetivos do Trabalho	13
1.2 Justificativa	14
1.3 Metodologia	14
1.4 Organização do Trabalho	14
2 Modelagem Matemática.....	16
2.1 Modelagem Matemática e os Parâmetros Nacionais de Matemática.....	17
2.2 O que é modelagem na Educação Matemática?	18
2.3 Como usar Modelagem Matemática em sala de aula?.....	21
2.4 Por que usar Modelagem matemática em sala de aula?.....	24
2.5 Modelos Matemáticos.....	27
3 Trigonometria: Funções Trigonométricas.....	29
3.1 O Circulo trigonométrico e a Funções de Euler	30
3.2 As Funções trigonométricas seno e cosseno	32
3.3 Gráficos das funções Seno e Cosseno.....	33
4 Uma proposta de atividade de Modelagem: Movimento das marés	35
5 Considerações Finais.....	46
6 Referências	48
ANEXOS	50

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta alguns aspectos relacionados com a Modelagem Matemática, ressaltando o seu uso como metodologia para o ensino da Matemática. Procura descrever e analisar uma proposta de ensino, desde seu planejamento às dificuldades que os professores porventura enfrentem para desenvolvê-la, quais os procedimentos que devem ser adaptados, quais atitudes devem ser tomadas no decorrer das atividades, enfim como se dá o processo de ensino e aprendizagem através da Modelagem Matemática.

A metodologia Modelagem Matemática pode ser utilizada nos vários níveis do sistema educacional, podendo ser utilizada para dar mais significado aos conteúdos, através da interpretação e compreensão dos mais diversos fenômenos do cotidiano. Quando trabalhada de maneira criativa, motivadora e eficaz, ela pode proporcionar diversos benefícios, a saber: facilitar a aprendizagem, desenvolver o raciocínio, desenvolver a criticidade, compreender o papel sócio-cultural da Matemática, e assim tornar o ensino da Matemática mais agradável aos alunos.

1.1 Objetivos do Trabalho

Nosso trabalho tem como objetivo geral ressaltar a importância da Modelagem Matemática no âmbito escolar através de uma proposta envolvendo uma função trigonométrica. Perseguiremos esse objetivo através dos seguintes Objetivos Específicos:

1. Elencar as potencialidades, bem como as dificuldades de inseri-la no currículo e especialmente na escola básica.
2. Discorrer sobre as funções trigonométricas e sua importância na escola básica.
3. Realizar uma proposta vinculada a modelagem Matemática contemplando os pré-requisitos apresentados no PCNEM.

1.2 Justificativa

É comum no ambiente da sala de aula, em particular na disciplina de Matemática o professor ouvir indagações dos alunos sobre os assuntos explanados, tais como: “Para que serve este conteúdo?” “Onde posso usar este conteúdo?” “Qual é a sua aplicação”? São perguntas frequentemente feitas.

Mediante tais questionamentos podemos refletir sobre a metodologia aplicada nas escolas que ainda estão vinculadas ao pragmatismo de outrora, ou seja, exposição de conteúdos seguidos de exemplos e lista de exercícios. No entanto, esta prática bastante apregoada antigamente, nos dias de hoje está causando uma desmotivação aos discentes.

Nesse sentido, a Modelagem surge justamente com o objetivo de amenizar este desequilíbrio entre a Matemática e o nosso entorno, realizando elo com as demais disciplinas e proporcionando o ensino e a aprendizagem mais agradável aos alunos, mediante a matematização de temas externos ao ambiente matemático, ou seja, abordando situações reais para serem solucionadas didaticamente em sala de aula.

1.3 Metodologia

No trabalho foi realizada uma pesquisa bibliográfica sobre a metodologia da Modelagem Matemática, evidenciando sua importância no ambiente escolar, em conjunto com práticas educacionais de ensino e aprendizagem nas aulas de Matemática, destacando todos os aspectos pertinentes à inserção desta metodologia no currículo escolar. Também foi apresentada uma proposta de atividade envolvendo Modelagem, para entender melhor os efeitos desta metodologia na estrutura escolar como também despertar no corpo discente uma visão mais ampla e crítica sobre os conteúdos matemáticos ensinados em sala de aula, proporcionando assim uma melhor compreensão e simpatia pela disciplina.

1.4 Organização do Trabalho

O presente trabalho encontra-se organizado em quatro capítulos:

No primeiro capítulo apresentamos a parte introdutória sobre o tema do trabalho, a Modelagem na Educação Matemática e a trigonometria, numa perspectiva de abordagem sobre

o fenômeno das marés, e assim também elencamos outros elementos de suma importância para o desenvolvimento do trabalho como: objetivos, justificativa, metodologia e a organização.

No segundo capítulo apresentamos a Modelagem Matemática de acordo com as visões de alguns estudiosos sobre o tema, bem como procedimento empregado nesta metodologia de ensino e aprendizagem na Educação Matemática. Destacando algumas indagações em torno do presente tema, as quais servirão de motivação para mostrar pontos bastante importantes para esta prática no âmbito escolar.

No terceiro capítulo é mostrada uma breve introdução às funções trigonométricas com destaque em especial as funções seno e cosseno.

No quarto e último capítulo apresentamos uma proposta de atividade envolvendo Modelagem de um fenômeno periódico com o objetivo de elaborar um modelo matemático que represente o movimento das marés, utilizando a trigonometria e logo em seguida faremos as nossas considerações finais.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática, enquanto metodologia de ensino, vem se desenvolvendo ao longo do tempo em busca de estratégias de ensino aprendizagem levando em consideração uma aprendizagem significativa. De acordo com Almeida (2012):

Atividades de Modelagem Matemática implicam a resolução de situações- problema, que, de modo geral, não são resolvidas por meio de procedimentos predefinidos e cujas soluções não são previamente conhecidas. Assim, a resolução correta de um problema, a aplicação corrente de método de resolução, são alguns indícios de que ocorre a interação entre o novo conhecimento e a estrutura cognitiva do aluno. Nesses termos também está sinalizada a aprendizagem significativa. Perante o desafio da introdução da Modelagem Matemática nas aulas de matemática, promover a aprendizagem significativa dos estudantes também é uma meta vislumbrate. (Almeida, 2012, p. 37).

Dessa forma, a Modelagem no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar matematicamente.

Portanto diante desta atividade de modelar podemos alcançar alguns objetivos que serão de extrema importância na Educação Matemática, a saber:

- A interdisciplinaridade;
- Sinalizar a importância da Matemática para a formação do aluno;
- Despertar o interesse pela Matemática;
- Melhor êxito na solidificação de conceitos;
- Desenvolver a habilidade e a criatividade.

Mediante o que acaba de ser exposto, esta metodologia que busca trabalhar com situações-problema da realidade e traz este recorte para o ambiente matemático, vem galgando espaço na Educação Matemática e como consequência sua inserção no currículo.

2.1 Modelagem Matemática e os Parâmetros Nacionais de Matemática

A Modelagem Matemática, enquanto metodologia de ensino, está em consonância com os PCN. Este documento aponta em alguns de seus princípios, guias relacionados com os objetivos da Modelagem Matemática na sala de aula, segundo alguns de seus proponentes:

- A Matemática é importante na medida em que a sociedade necessita e se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, que são essenciais para a inserção das pessoas como cidadãos no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais (p.41).
- A atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade (p.42).
- O ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, dedução, analogia, estimativa (p.40).

Uma característica fortemente observada nos princípios norteadores pautados nos PCN é que a Matemática deve ter um aspecto de inserção social e política, o que certamente conduzirá a uma maior aplicabilidade dos conceitos aprendidos. É preciso uma prática de ensino e aprendizagem que assegure a aprendizagem dos conceitos matemáticos, valorize o espírito de investigação, a formulação de conjecturas e a argumentação. Parece ser consenso entre os estudiosos que a Modelagem Matemática traz benefícios para a sala de aula de Matemática nestes aspectos.

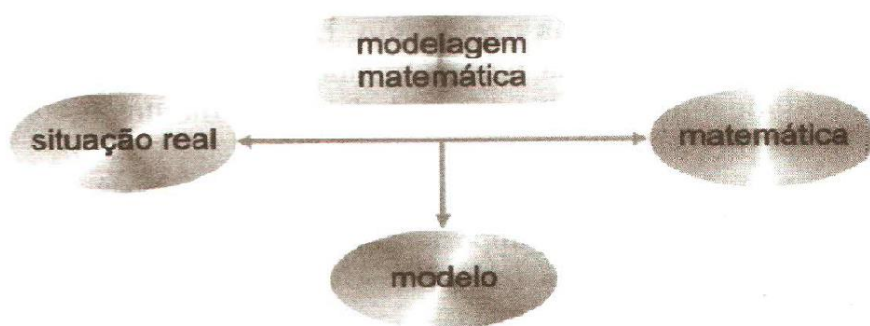
Se a intenção é trabalhar Matemática de maneira a assegurar competências como aprendizagem de conceitos matemáticos, inserção social, cultural e política, podemos apontar modelagem matemática e modelos matemáticos, como uma das maneiras de desenvolver essas competências. De forma geral, professores que a promovem e a utilizam afirmam que ela tem propósitos de desenvolver linguagens matemáticas e modos de pensar que podem facilitar a compreensão do mundo físico e social onde vivemos.

2.2 O que é modelagem na Educação Matemática?

De modo geral, uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação- problema (início) e de uma situação final, mediada por um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para uma situação final a partir de um recorte da realidade, onde obtemos um objeto de estudo não matemático para fundir-se com conceitos matemáticos, e daí subsidiar o conhecimento de forma integrada.

No entanto, em uma situação-problema a priori não há esquema, sendo assim a mesma deverá ser tratada através de procedimentos que reúnem conceitos matemáticos para elaboração de um modelo matemático que venha a elucidar a situação- problema.

Figura 1: Esquema do processo da modelagem matemática.



Fonte: Biembengut, 2013, p13.

A seguir, mostraremos as concepções de alguns autores sobre a Modelagem Matemática:

- **Biembengut** (2012): É uma estratégia usada para se chegar ao modelo matemático com intuito de ensinar conhecimentos acadêmicos que possam valer as pessoas viverem, sobreviverem, atuarem no meio, em comunidade.
- **Burak** (1992): É uma metodologia de ensino que se constitui em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e a tomar decisões.
- **Barbosa** (2004): Um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade.

- **Bean** (2009): É uma atividade humana na qual uma parte da realidade está conceitualizada, de forma criativa, com algum objetivo em mente. Consiste na formulação de um isolado, ou seja, na conceitualização de uma situação com fundamento em premissas e pressupostos que remetem tanto à situação quanto aos objetivos do modelador (o aluno).
- **D’ambrosio** (1986): “Modelagem é um processo muito rico de encarar situações e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial.”
- **Bassanesi** (2006): “A modelagem matemática consiste essencialmente na arte de transformar problemas da realidade e resolve-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Considerando que esta atividade tem, em uma situação-problema sua essência e tem como característica primordial a possibilidade de contemplar o cotidiano, algo que pode estar fora do ambiente matemático, podemos caracterizá-la como um conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução os quais podemos agrupar em três etapas, e cada uma dessas etapas subdividí-las em duas subetapas, a saber:

1. **Inteiração:** Representa o primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de reconhecer as características e especificidades da situação. A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para chegarmos a resolução. Sendo escolhida a situação deveremos tratá-la de forma especial estudando-a de forma direta (experimentos em campo) ou indireta (a partir de livro e outros meios teóricos). Segundo Biembengut (2013, p.13), a inteiração subdivide-se nas seguintes etapas:
 - Reconhecimento da situação-problema
 - Familiarização com o assunto a ser modelado
2. **Matematização:** Nesta etapa iremos tratar a situação-problema, que se apresenta em linguagem natural, totalmente desconectada da linguagem matemática. Daí a necessidade de transformar e representar tal linguagem para o ambiente matemático. A busca e elaboração de uma representação matemática são medidas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características. Portanto podemos considerar esses processos de transição de

linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas. Neste sentido as descrições são realizadas mediante formulação de hipóteses, seleção de variáveis, a partir de informações advindas da situação-problema definida no passo anterior. Segundo Almeida (2012 apud Freudenthal(1973) a matematização “objetiva dar significado matemático para a organização da realidade” (2013, p.13). Segundo Biembengut a matematização subdivide-se nas seguintes etapas:

- Formulação do problema
- Resolução do problema em termos do modelo

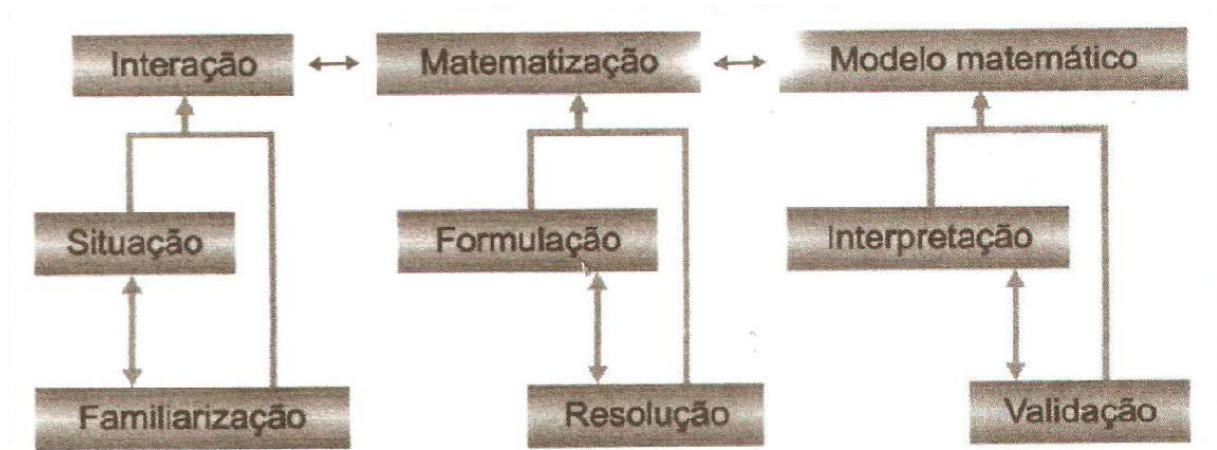
3. Elaboração de um Modelo Matemático: consiste em se ter uma linguagem concisa que expresse de maneira clara a ideia, sem ambiguidade, através de um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representem de forma precisa o objeto estudado, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados.

Segundo Bassanezi (2006), trabalhar com modelagem no ensino não é mera questão de ampliar conhecimento matemático, mas, sobretudo, de se estruturar a maneira de pensar e agir do aluno. Espera-se que, durante o processo de modelagem, educandos e professor adquiram e desenvolvam o senso crítico, ou seja, uma forma de cidadania baseada no entendimento comum. O processo de pesquisa no ensino e aprendizagem deve ser formulado para dar experiência aos modeladores (no caso professor e alunos).

Para Bassanezi (2006), o aspecto do aprendizado é importante, pois valoriza diversas maneiras de resolver problemas, que é uma das mais altas formas do desenvolvimento intelectual para todos os indivíduos. Desta perspectiva a modelagem no ensino é uma estratégia de aprendizagem, onde "o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas nas quais o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado" (BASSANEZI, 2006, p. 38). Segundo Biembengut (2013, p.13). a elaboração de um Modelo Matemático subdivide-se nas seguintes etapas:

- Interpretação da solução
- Validação do modelo

Figura 2: Dinâmica da modelagem matemática



Fonte: Biembengut, 2013, p15.

2.3 Como usar Modelagem Matemática em sala de aula?

No que diz respeito à utilização da Modelagem em sala de aula é bastante salutar e relevante que haja discussões e indagações objetivando a melhor diretriz para a introdução dessa metodologia de ensino no âmbito escolar. O que é Modelagem? E por que inserir atividades de Modelagem na sala de aula? São questões fortemente revestidas de aspectos empíricos que podem determinar a introdução e a condução de atividades dessa natureza nas aulas.

Também há alguns obstáculos quanto à integração da Modelagem no currículo escolar como:

- Como introduzir atividades de Modelagem?
- Qual é a duração de uma atividade de modelagem?
- Como lidar com os conteúdos curriculares em atividades de modelagem?
- Quem deve ser responsável pela definição do problema (professor ou alunos)?
- Como fazer com os alunos que não estão familiarizados com a resolução de problemáticas ou de aplicações em sala de aula?

Apesar de a Modelagem Matemática ter sido inicialmente pensada como uma atividade, onde tem início uma situação (problema) e culmina com uma situação final (solução do problema), esta atividade também pode ser percebida como uma alternativa pedagógica

utilizando-se da Matemática para explicar problemas não matemáticos. Então neste contexto pedagógico o que se destaca é justamente a transição entre início e fim, ou seja, problema e solução. Por essa razão é dada extrema importância à transição, pois dela emerge efetivamente o que conhecemos como ensino e aprendizagem que tem repercussão direta na ação do professor em sala de aula e o que o aluno faz e como ele faz para aprender.

A incorporação das atividades de Modelagem em sala de aula deve levar em consideração especificidades do contexto educacional, dando atenção aos professores, aos alunos e à própria estrutura escolar.

Três aspectos importantes segundo Almeida (2012) na utilização da Modelagem Matemática nas aulas de Matemática são:

1. O espaço e as condições das atividades de Modelagem Matemática no currículo escolar e/ou nas aulas de Matemática

No ambiente da própria aula de Matemática, onde se pode trabalhar em uma via dupla, a partir das aulas expositivas de determinado assunto o professor pode requisitar aplicação e Modelagem Matemática como forma de auxílio para introdução de conceitos matemáticos. O mesmo pode ser visto de modo invertido quando nos deparamos com novos conceitos, métodos e resultados matemáticos que podem ser direcionados para aplicação e modelagem. É válido ressaltar que este tipo de atitude vai ao encontro dos procedimentos de Modelagem, onde tínhamos uma situação inicial e daí buscávamos solução para esta, passando por etapas importantes do processo, conforme a figura 2 na página anterior.

Outro fator importante é o horário e espaço extraclasse, por essa razão tais atividades são aplicadas em cursos ou atividades extracurriculares. No entanto, as aulas regulares não perderão a sua fluidez normal, e assim a Modelagem seria introduzida de forma coerente no currículo do curso ou da disciplina.

Entretanto uma combinação das duas outras situações anteriores permitirá que a atividade de Modelagem esteja presente nas aulas de Matemática e em encontros extraclasse e, desse modo, a Modelagem estará sendo inserida no currículo. Caldeira (1992), ao apregoar a introdução da Modelagem Matemática no currículo escolar, argumenta que não se trata de defender uma Educação Matemática “na qual o estudante simplesmente aprenda o que ele utilizará na semana seguinte, no seu cotidiano, mas aquela que selecione e apresente os conteúdos matemáticos necessários para uma compreensão de sua própria realidade e o fortalecimento dos vínculos sociais” (p.37).

Portanto, a utilização da Matemática por parte dos alunos durante as atividades, onde os alunos podem fazer uso de conhecimentos já construídos durante as aulas ou construir novos. Mediante as atividades é comum que os alunos se depararem com alguns obstáculos, então surge a figura do professor para orientá-los a superar as dificuldades.

2. A atuação do professor nas aulas de Matemática

Quanto à atuação do professor e do aluno no desenvolvimento das atividades de Modelagem na sala de aula, é importante determinar especificamente o que cada um, entre professor e aluno, deve fazer durante as atividades. Partindo desse cenário atual não se podem esquecer as dificuldades envolvidas quando se passa de uma situação de aulas expositivas para uma nova situação, onde será empregada uma nova metodologia (Modelagem Matemática) que se trata de uma área investigativa e requer entrar em uma “zona de risco”.

A fim de mitigar esta insegurança, é fundamental que seja estruturada uma formação docente balizada nos seguintes pontos: **aprender sobre aprender por meio e ensinar usando a Modelagem Matemática**, e assim promover uma relação entre teoria e prática vislumbrando o movimento de conforto para o risco.

Neste sentido, algumas indagações são pertinentes: Qual é o papel do professor? Quem define o tema a ser estudado? Como conduzir aulas com Modelagem matemática?

Portanto o professor deverá ser orientador desde que o aluno seja coparticipante no processo já que o seu desenvolvimento intelectual é o principal objetivo da atividade e levando também em consideração que os trabalhos em grupo orientados e estimulados e cabe ao professor ter uma postura mais eficaz ou não dependendo do andamento da atividade proposta aos alunos.

3. A familiarização dos alunos com atividades de Modelagem Matemática

A familiarização com as atividades por parte dos estudantes, deve se dar de forma paulatina, mediante a figura do professor nas práticas em sala de aula baseadas na realização de atividades investigativas.

Neste sentido a inserção da Modelagem como alternativa pedagógica, segundo Almeida (2012), avança em três perspectivas e, assim o processo pode ser realizado de forma gradativa, em momentos:

- 1. No primeiro momento** o professor apresenta aos alunos uma situação-problema em conjunto com os dados e as informações necessárias.

2. No **segundo momento** apenas a sugestão da situação-problema.
3. No **terceiro momento** os alunos são responsáveis por escolher a situação-problema.

Assim, a participação e o desenvolvimento dos alunos em relação aos avanços das diferentes fases da Modelagem Matemática vão se intensificando e solidificando no decorrer desses diferentes momentos.

2.4 Por que usar Modelagem matemática em sala de aula?

Vários pesquisadores ao longo das últimas décadas vêm defendendo a inserção da Modelagem Matemática nas aulas de matemática, mediante várias argumentações que contemplam tal inserção. Podemos citar as de Christine Keitel (1993), onde professores e alunos diante de uma atividade de modelagem poderiam ter interesses e procedimentos distintos para a resolução do problema.

Nesse contexto, Kaiser e Sriraman (2006), apresentaram a sistematização para a Modelagem diante de alguns aspectos relevantes para o desenvolvimento desta atividade no contexto educativo. Eles os chamam de perspectivas que são:

1. **Realística** - tem o objetivo de desenvolver habilidades de resolução de problemas aplicados, advindos de locais de trabalhos;
2. **Contextual** – considerando a questão motivacional é trazido para as aulas de Matemática situação-problema a fim de contextualizar e/ ou termos a aplicação dos conteúdos matemáticos objetivando um modelo matemático construído pelos alunos a partir de ideias matemáticas.
3. **Sociocrítico** – tem como principal orientação formar e capacitar o aluno, buscando o anseio da sociedade para exercer a cidadania de forma autônoma, refletindo e debatendo a matemática no uso mediante a sociedade.
4. **Epistemológico** – esta perspectiva visa fomentar o desenvolvimento matemático através de modelagem. Neste sentido a situação-problema serve para estruturar conceitos e propriedades matemáticas.
5. **Educacional** – visa à importância da aprendizagem significativa da Matemática através da modelagem instigando os alunos a investigar mediante os modelos matemáticos, cabendo ao professor verificar as dificuldades do

alunado frente à matematização, interpretação e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Neste sentido podemos ressaltar também dois seguimentos que diz em respeito à educacional didática (desenvolvimento da aprendizagem) e à educacional conceitual (sistematização de conceitos matemáticos).

- 6. Cognitivo** – se preocupa em analisar os processos cognitivos que ocorrem durante o desenvolvimento de atividade de modelagem.

Diante do desenvolvimento de atividades de modelagem segundo estas perspectivas estão vinculados, na possibilidade de ensinar e aprender Matemática, além de suas aplicações para a resolução de problemas que o aluno possa se deparar fora do ambiente escolar e também as potencialidades da modelagem quanto ao ensino e aprendizagem de alguns conteúdos.

Uma das principais razões da introdução da Modelagem Matemática na Educação Matemática é o aspecto motivacional, onde serão abordadas questões reais, oriundas de ambientes que lhe despertem interesse e façam o elo entre a Matemática e vida real. Assim, estimular o aluno para construção do conhecimento matemático em outras áreas de conhecimentos. Isso nos leva a pensar que uma motivação contextualizada com o curso ou com a vida real cria nos alunos uma afetividade com a disciplina e o desejo de aprender. Segundo Charlot (2000), uma motivação, agente externo, pode causar uma mobilização interna e essa desencadeia o desejo de aprender, e dessa forma favorecer a relação entre conhecimento científico e conhecimento escolar mesclados nas aulas de matemática. Segundo Almeida (2012):

A questão motivacional e as relações entre a matemática e a realidade mediadas pela Modelagem Matemática parecem então estar interligadas de modo que, por um lado, atribuir sentido e construir significados em Matemática de mandam situações de ensino e aprendizagem que induzam relação entre a Matemática e a vida dos alunos fora da escola; por outro lado, as atividades de modelagem Matemática podem favorecer a aproximação da matemática escolar com problemas extraescolares vivenciados pelos alunos. (ALMEIDA, 2012, p. 31).

Outro importante instrumento é a inserção do computador nas aulas de Matemática para ser utilizados nas atividades de Modelagem, todavia é de suma importância o manuseio deste instrumento de maneira que venha a beneficiar o ambiente pedagógico uma vez que pode modificar práticas de ensino e a relação aluno e aprendizagem. Assim a forma de abordar a Matemática requerida nas aulas com modelagem e computador pode ser diferente daquela usada na ausência desse instrumento.

Além de auxiliar professor e alunos na elaboração de gráficos bem como a realização de cálculos, pode possibilitar uma melhor compreensão das representações algébricas.

Portanto ao utilizar o computador podemos perceber certas vantagens para tal: trabalhar com situações-problema mais complexas e com grande quantidade de cálculos; possibilitar maior desenvolvimento e esforço cognitivo, uma vez que a parte de cálculos, gráficos seriam realizados pela máquina. Neste sentido, influenciar de forma positiva a disposição do aluno em aprender considerando que permita criar situações que atuam como uma ponte entre o conhecimento teórico e a realidade.

Como a Modelagem se dá no ambiente escolar, podemos ressaltar também que a interação e/ou a relação é um elemento essencial no contexto educativo e ganham importância uma vez que ensinar e aprender são atos eminentemente comunicativos e interativos. Daí aprender é uma experiência pessoal, mas se dá em contexto social a partir de relações interpessoais.

Quando os alunos trabalham juntos com o mesmo objetivo e produzem um produto ou solução final comum, têm a possibilidade de discutir os méritos das diferentes estratégias para resolver o mesmo problema e isso pode contribuir significativamente para a aprendizagem dos conceitos envolvidos. Portanto fortalecemos a nossa concepção de que a interação social tem um lugar importante na construção do conhecimento.

O conhecimento reflexivo tem potencial para suscitar interpretações para os modelos em relação às situações a que estão associados e pode orientar como agir numa situação estruturada pela matemática.

Skovsnose (2001) ressalta a importância do conhecimento reflexivo como passaporte necessário para a interpretação e discussão dos modelos matemáticos que, em plena atividade na sociedade, estão influenciando decisões e atitudes. Tais modelos são constituídos pela interação entre os conhecimentos matemáticos e o tecnológico.

2.5 Modelos Matemáticos

Quando se procura refletir uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela, o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial; o modelo que é a representação de alguma coisa.

Durante a antiguidade o termo modelo é usado em várias situações. Neste sentido, “modelo”, representa algo que pode ser utilizado em áreas diversas como Arte, Moda, Engenharia, Matemática, entre outras. Portanto a sua finalidade é representar algo que seja realmente significativo e retrate bem o objeto real. Mas o modelo é sempre uma tentativa de expor e/ou explicar características de algo que não está presente por meio deste modelo. No entanto este termo será aqui considerado apenas no que concerne a representação de um sistema. No ambiente matemático não é diferente. Usamos modelos matemáticos para representar, explicar e “tornar presentes” situações matemáticas ou não com objetivos de analisar matematicamente. Daí então podemos considerar um modelo matemático sendo um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expressa através da linguagem ou uma estrutura matemática com a finalidade de descrever ou explicar o comportamento de um sistema.

D'Ambrosio (1986) considera que o modelo é um ponto de ligação entre as informações obtidas pelo sujeito que modela e sua ação sobre a realidade e pode ser considerado um recurso que dá às pessoas condições de exercer seu poder de análise da realidade. Tal afirmação aponta tanto para o caráter dinâmico da Modelagem Matemática quanto para a subjetividade relacionada ao modelo matemático.

Na obtenção de um modelo, levamos em consideração os objetos matemáticos envolvidos e o estudo de suas características e propriedades. É importante termos em mente que ao trabalharmos com a obtenção de modelos matemáticos, estamos interessados também na compreensão da Matemática envolvida na obtenção de tal modelo.

Entendemos modelo matemático como uma representação apresentada em linguagem Matemática que faz referência à situação real que o originou. Para a obtenção do modelo, esperamos que diferentes formas de representação sejam mobilizadas e as diferentes atividades cognitivas (tratamento e conversão) estabelecidas para que ocorra a conceitualização do objeto matemático que está sendo desenvolvido.

Um modelo matemático, segundo Bassanezi (2006), é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam, de maneira simplificada, uma parte da realidade. Em

consonância com esse autor, os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos analisados e classificados conforme o tipo de matemática utilizada. A saber:

linear ou não linear: conforme suas equações básicas tenham estas características. **Estático:** quando representa a forma do objeto – por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo; ou **Dinâmico:** quando simula variações de estágios do fenômeno – por exemplo, crescimento populacional de uma colmeia. **Educacional:** quando é baseado num número pequeno ou simples de suposições, tendo quase sempre, soluções analíticas. O método empregado por tais modelos envolve a investigação de uma ou duas variáveis, isoladas da complexidade das outras relações fenomenológicas. Ou **Aplicativo:** aquele baseado em hipóteses realísticas e que, geralmente, envolve inter-relações de um grande número de variáveis, fornecendo em geral sistemas de equações com numerosos parâmetros (BASSANEZI, 2006, p. 20).

Embora a construção de um modelo matemático seja importante na atividade de Modelagem Matemática, não a consideramos como o fim deste tipo de atividade, mas como uma alternativa que pode permitir uma compreensão mais global sobre a situação investigada e a Matemática utilizada.

3 TRIGONOMETRIA: FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A trigonometria teve início na antiguidade e era tradicionalmente relacionada a problemas de medições em triângulos. Daí com o passar tempo obteve sua evolução moldada pelo homem, a partir de vários estudiosos e suas contribuições. No século XVIII, a trigonometria é apresentada em sua forma atual por Leonhard Euler ao tomar a medida do raio de um círculo como unidade e definir funções aplicadas a um número ao invés de ângulo. Assim ocorreu uma transição das razões trigonométricas para funções periódicas.

Além disso, com o surgimento do cálculo infinitesimal o estudo foi impulsionado e atingiu seu ápice com a criação da função de Euler. Através desta função é possível definir o que se entendia por seno e cosseno de um número real x . Portanto a função de Euler permitiu que a Análise Matemática e diversas aplicações às ciências abrissem as portas para a trigonometria.

Partindo desse pressuposto iremos apresentar as **funções trigonométricas** em relação a duas características que lhe são peculiares: a periodicidade e a continuidade. Iremos também nos restringir a duas funções em particular, função seno e função cosseno.

Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever fenômenos de natureza periódica, ou seja, que se repetem a cada determinado período de tempo, daí a importância de estudarmos fenômenos periódicos utilizando tais funções. E assim podemos consolidar o elo entre temas matemáticos e os não matemáticos. Com respeito a esse elo, os PCN destacam que:

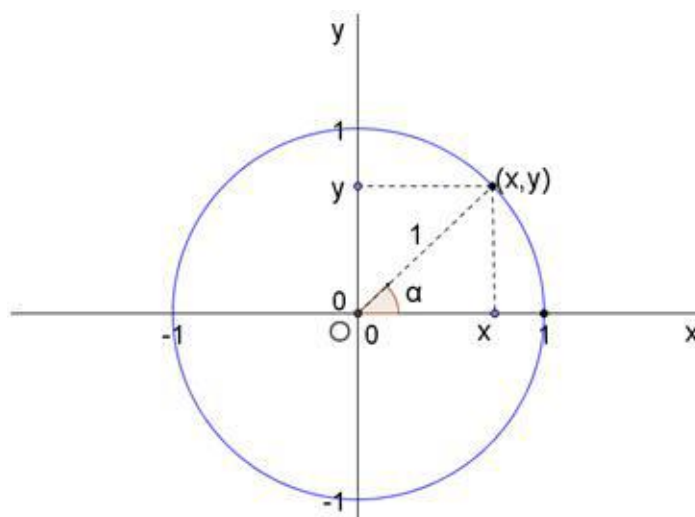
“[...] das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a Física, Geografia ou Economia. Cabe, portanto, ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema de Matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.”. (BRASIL 2014, p.44).

3.1 O Círculo trigonométrico e a Funções de Euler

Define-se o círculo trigonométrico (C) que é a circunferência centrada na origem $(0,0)$ do sistema de coordenadas cartesianas de raio 1. Podendo ser descrita na forma $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ em qualquer ponto $\in C$, onde x e y variam de -1 a 1 em seus respectivos eixos (abscissa e coordenada), ou seja, se $(x, y) \in C$, então $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

Convencionou-se o sentido anti-horário sendo positivo e a origem do arco o ponto $A = (1,0)$.

Figura 3: Círculo unitário



Fonte: o autor

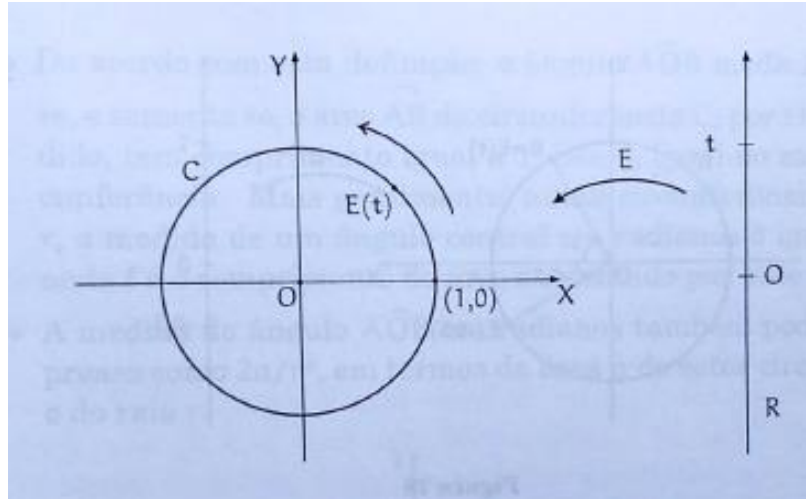
A função de Euler proporcionou um grande avanço no ambiente trigonométrico, pois a partir dela pode-se associar cada número real a um ponto da circunferência unitária com domínio nos reais e imagem na circunferência. Em consonância ao exposto pode-se fazer uma analogia e, pensar em um fio fixado no ponto $A = (1,0)$ que será enrolado sobre a circunferência.

Portanto, a função $E: \mathbb{R} \rightarrow C$ faz corresponder a cada número $t \in \mathbb{R}$ a um ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária C de modo que:

- Se $t = 0$, então coincide com o ponto $A = (1,0)$ de C , isto é, $E(0) = (1,0)$;
- Se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C , a partir da origem dos arcos o ponto $(1,0)$, um caminho de comprimento t no sentido positivo. O ponto final do caminho será denominado $E(t)$;

- Se $t < 0$, $E(t)$ percorremos sobre a circunferência C , a partir da origem dos arcos o ponto $(1,0)$, um caminho de comprimento $|t|$ no sentido negativo. O ponto final do caminho será denominado $E(t)$.

Figura 4: Circulo trigonometrico envolvido pela reta Real



Fonte: Elon Lages. A matemática do ensino médio – volume 1, p 219

Nota-se então que, quando t descreve na reta um intervalo de comprimento L , sua imagem $E(t)$ descreve um arco de mesmo comprimento na circunferência C . Sendo 2π o comprimento de C , então quando descreve-se na reta um intervalo de comprimento $L = 2\pi$, sua imagem $E(t)$ dá uma volta completa sobre C quando volta ao ponto de partida. Portanto para todo $t \in \mathbb{R}$, teremos $E(t + 2\pi) = E(t)$, sendo mais geral para todo $k \in \mathbb{Z}$, teremos $E(t + 2k\pi) = E(t)$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

Por definição uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe um número p não nulo tal que $f(t + p) = f(t)$ para certo $p \in \mathbb{R}$ e $p > 0$ e para todo $t \in \mathbb{R}$.

A função de Euler é uma função periódica com período 2π , e $E(t + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, são as várias imagens de $t \in \mathbb{R}$.

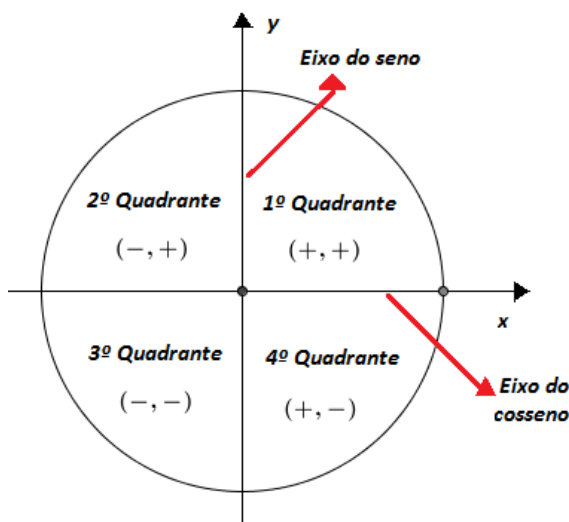
3.2 As Funções trigonométricas seno e cosseno

As funções Seno e Cosseno são definidas para cada $t \in \mathbb{R}$, a partir da função de Euler, ou seja, $E(t) = (\cos(t), \sin(t))$, onde $\cos(t) = x$ e $\sin(t) = y$. Portanto, quando $t = 0$ temos $E(0) = (1,0)$, logo, $\cos(0) = 1$ e $\sin(0) = 0$ e quando $t = \frac{\pi}{2}$, temos $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e assim por diante.

No entanto, como vimos que a função de Euler é periódica, com período 2π , $E(t + 2k\pi) = E(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$. Sendo assim as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π , isto é, observando e conhecendo o comportamento destas funções no intervalo $[0, 2\pi]$, saberemos o comportamento em todos os intervalos seguintes e/ou anteriores de comprimento 2π . Daí segue que o gráfico da função $y = \sin(t)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é igual ao gráfico desta mesma função no intervalo $[2k, 2(k + 1)\pi]$. Assim sendo restringiremos o estudo ao ponto $[0, 2\pi]$ que corresponde a justamente uma volta no círculo trigonométrico.

Como o círculo trigonométrico é subdividido em quatro quadrantes, as funções seno e cosseno, como coordenadas de um ponto do círculo unitário, têm valores que dependem do quadrante em que se encontram.

Figura 5: Projeção ortogonal



Fonte: Barroso, 2010 p. 55

Daí segue que:

O domínio das funções seno e cosseno é \mathbb{R} e a imagem é $[-1, 1]$.

Quanto aos sinais das funções, segue a tabela 1:

Tabela 1: Sinais das Funções Seno e Cosseno.

Sinais das funções		
Seno	Positivo no 1º e 2º quadrantes	Negativo no 3º e 4º quadrantes
Cosseno	Positivo no 1º e 4º quadrantes	Negativo no 2º e 3º quadrantes

Quanto ao comportamento das funções segue a tabela 2 abaixo:

Tabela 2: Comportamento dos gráficos das Funções Seno e Cosseno.

Comportamento gráfico		
Seno	Crescente no 1º e 2º quadrantes	Decrescente no 3º e 4º quadrantes
Cosseno	Crescente no 3º e 4º quadrantes	Decrescente no 1º e 2º quadrantes

3.3 Gráficos das funções Seno e Cosseno

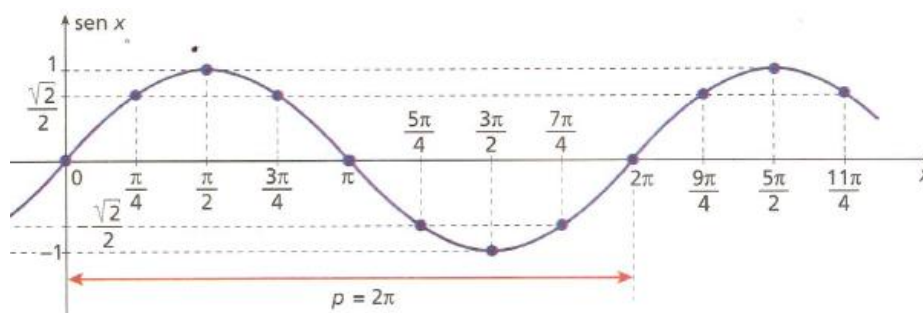
Visualmente o gráfico de uma função real, é o lugar geométrico de todos os pontos de coordenadas $(x, f(x))$ no plano \mathbb{R}^2 (ou simplesmente no plano). O gráfico de uma função fornece, de uma forma bastante eficiente, uma ideia global do comportamento dessa função em todo o seu domínio.

O gráfico da função seno é o conjunto de todos os pontos no plano com $t \in \mathbb{R}$.

Também segue o mesmo critério o gráfico da função cosseno é o conjunto dos pontos do plano de coordenadas, com $t \in \mathbb{R}$.

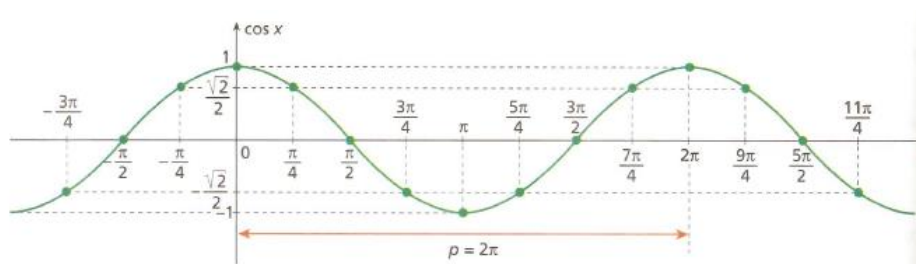
Pode-se observar nas Figuras 6 e 7 abaixo que os gráficos das funções seno e cosseno são periódica indefinidamente tanto pra o lado positivo como para o negativo.

Figura 6: Curva da função seno $f(t) = \text{sen}(t)$.



Fonte: Barroso, 2010 p. 55

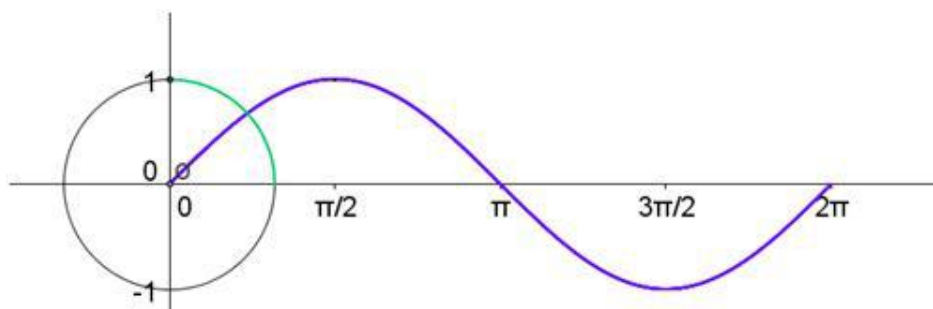
Figura 7: Curva da função cosseno $f(t) = \cos(t)$.



Fonte: Barroso, 2010 p. 58

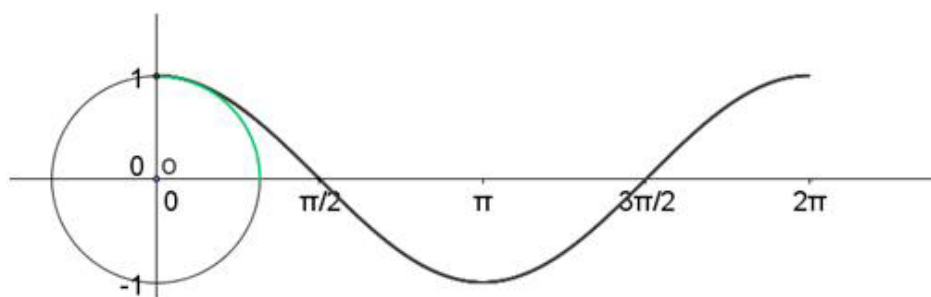
E um fato importante entre elas é justamente a translação no eixo x de $\frac{\pi}{2}$, caracterizando as relações de simetria existente entre essas funções

Figura 8: Gráfico da função $f(t) = \text{sen}(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$



Fonte: Autor

Figura 9: Gráfico da função $f(t) = \cos(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$



Fonte: Autor

4 UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE DE MODELAGEM: MOVIMENTO DAS MARÉS

No sentido de mostrar a importância da Matemática no cotidiano e observando-a através de olhares mais amplos, a fim de nos dar retorno na compreensão de problemas externos ao ambiente matemático, a Modelagem traz o sustento preciso com embasamento e procedimentos que contemplam uma conexão da Matemática com as demais áreas do conhecimento.

Nesse contexto, apresentamos uma proposta envolvendo a modelagem de uma situação real e o elo existente entre as disciplinas para elaboração de um modelo e consequente busca da solução. A situação que exploraremos em nossa proposta trata do movimento das marés, um fenômeno natural explicado pela Matemática subsidiado pelas demais áreas do conhecimento envolvidas neste fenômeno: Geografia (relativo a determinadas áreas e/ou locais geográficos), Astronomia (a relação entre os astros e sua influência no ambiente terrestre) e Física (a relevância dos fenômenos físicos quanto aos deslocamento da massa fluida no globo proveniente da gravitação). A esse respeito, os PCN defendem;

(...) que o critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência. (BRASIL 2014, p.42).

O que se propõe nessa atividade é justamente abordar a modelagem de um fenômeno natural baseado no **primeiro momento da modelagem**, conforme apresentado no capítulo anterior, onde o professor lança a situação-problema em conjunto com hipóteses, informações e variáveis.

De acordo com os procedimentos de modelagem é bastante válida a apresentação de um texto para favorecer a familiaridade do alunado com a situação em questão destacando

sempre a presença da Matemática, conectando-a com as demais áreas do conhecimento bem como ressaltando a importância da interdisciplinaridade na educação, que definitivamente estão imbricadas no currículo escolar.

1º Passo: situação inicial

Aqui será escolhida a problemática a ser trabalhada pelos alunos, no nosso caso, o movimento das marés.

2º Passo: Inteiração

Neste passo serão apresentados suportes aos alunos através da leitura de um texto, buscando o nivelamento dos alunos na sala de aula, bem como a **definição do problema**, a análise e delimitação de dados relevantes ao problema proposto. Neste momento também será evidenciada a interação das demais áreas do conhecimento vislumbrando a interdisciplinaridade citada nos PCN.

Depois da familiarização dos alunos com a situação-problema o próximo passo dos alunos é encontrar um modelo matemático associado aos movimentos das marés. A partir daí a atividade investigativa terá início. É importante destacar a influência e o posicionamento dos astros (sol e lua), bem como os diferentes pontos da costa terrestre estruturando assim o dinamismo do movimento das marés.

Levando em consideração estes aspectos iremos especificar os dados de uma área para nossa investigação. Optamos pelo litoral Pessoaense e os dados que propomos utilizar estão na tabela a seguir:

Tabela 3: Comportamento das marés no dia 27/07/2014 em João Pessoa, Tabuademares.com. Disponível em:< <http://www.tabuademares.com/br/paraiba/joao-pessoa>>. Acesso em 27 de julho de 2014.

Dia	Hora	Altura (m) da maré
Quarta 27/07/2017	03:35	2.2
Quarta 27/07/2017	09:30	0.4
Quarta 27/07/2017	15:55	2.2
Quarta 27/07/2017	21:50	0.4

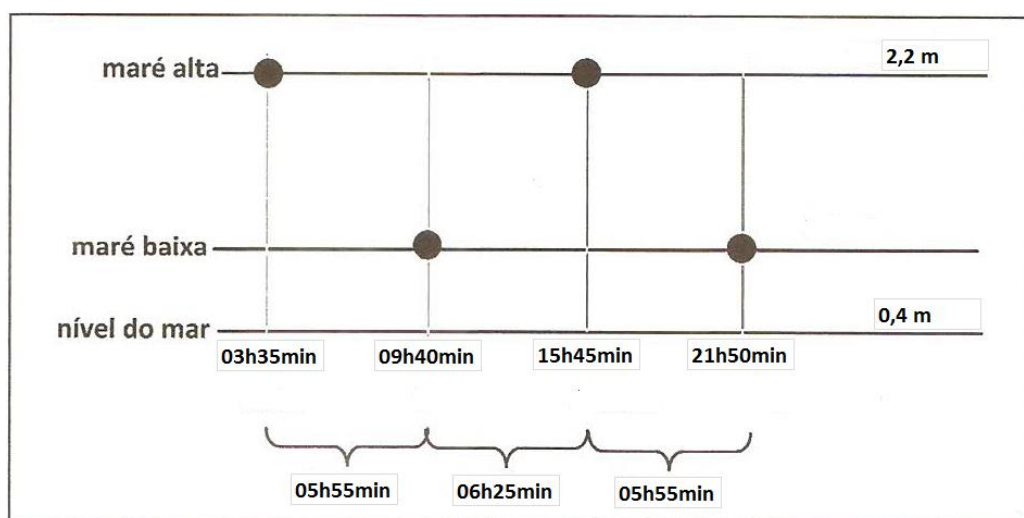
Problema: Ao longo da história o homem sempre buscou compreender os fenômenos naturais e seu encadeamento, e até hoje se perpetua esta prática. Partindo desse pressuposto emerge como proposta para nosso problema o seguinte questionamento:

Como determinar a altura da maré em relação ao tempo no decorrer de um dia no litoral pessoense?

A partir das informações do texto em anexo de onde foram colhidos os dados da tabela 1 e também a formulação da nossa hipótese que, em se tratando de um fenômeno natural e periódico, podemos **retratar esta realidade através de funções periódicas**, uma vez que este fenômeno ocorre com frequência natural (**movimento das marés**), podemos representá-lo através de funções trigonométricas. Consideração às alturas das marés; média entre as marés baixas ($\frac{0,4+0,4}{2} = 0,4$) em metro e também média entre as marés altas ($\frac{2,2+2,2}{2} = 2,2$) em metro, portanto este fenômeno poder ser tratado por uma função seno ou cosseno, por tratar de movimentos ondulatórios suaves.

Construindo um esquema representativo das marés na figura 7, verificando também as variáveis independente (tempo = t) e dependente (altura no instante t , $h(t)$).

Figura 10: Esquema representativo da situação das marés



Fonte: Adaptado Almeida o, 2012 p. 56

Sabendo dos horários de cada maré (alta e baixa), identificamos o período entre uma maré baixa e uma maré alta obtendo assim três períodos e logo em seguida realizamos a média aritmética dos três períodos apresentados para encontrar o período eficaz de 6h 05min ou 6,008h. O resultado mostrado aproxima-se do que foi apresentado no texto em anexo, onde apresentava o período em torno de 6h 12min.

Partindo da hipótese e das variáveis extraídas do texto apresentado, podemos chegar a um Modelo Matemático que represente tal situação:

Na maré alta temos 2.2m e na maré baixa temos 0.4m, ou seja, a imagem da função está inserida neste intervalo $[0.4, 2.2]$;

O período entre uma maré alta e uma maré baixa é aproximadamente, 6,008h. Daí concluímos que o período entre uma maré baixa e outra baixa é aproximadamente, 12,016h;

Durante a atividade podemos relacionar este fenômeno com duas funções trigonométricas (Seno e Cosseno), porém optamos pela função seno para representar o movimento das marés, por se tratar da ascendência de gráfico no primeiro quadrante.

Tabela 4: Comportamento das marés no dia 27/07/2014 em João Pessoa após os ajustes das médias.

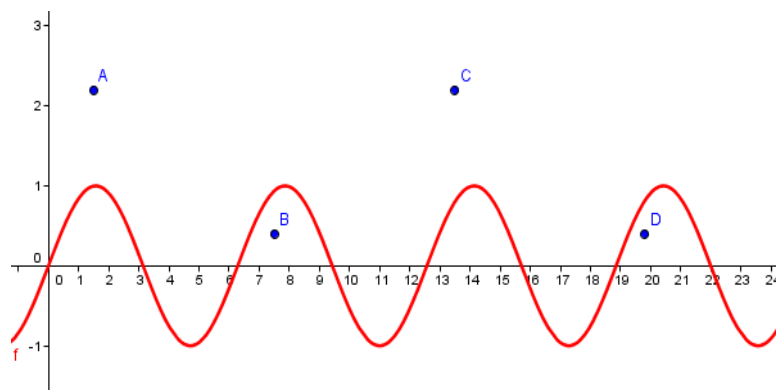
Dia	Hora	Altura (m) da maré
Quarta 27/07/2017	03:35	2.2
Quarta 27/07/2017	09:40	0.4
Quarta 27/07/2017	15:45	2.2
Quarta 27/07/2017	21:50	0.4

3º Passo: Matematização:

Neste passo será organizado e sistematizado o conhecimento matemático lançando mão de: conceito, variáveis, representação de objeto matemático, definição, dentre outros, com intuito de representar nossa situação real matematicamente. Assim definimos a hipótese em relação ao movimento realizado no decorrer de um dia 27/07/2014, onde houve oscilações entre 0,4m a 2,2m, num determinado tempo t e uma altura h .

Levando em conta as propriedades da função seno, como o período, a amplitude e a translação em ambos os eixos, considerando as informações da figura 8, pode-se partir da função $h(t) = \sin t$ e a partir desta observar as propriedades da função em questão ajustando os parâmetros a fim de uma melhor representação do dado. Neste momento podemos utilizar o software GeoGebra para auxiliar nos ajustes dos pontos da tabela ao gráfico de uma função seno adequada.

Figura 11: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}x$ e os pontos conhecidos para a situação da maré alta e baixa durante 24 horas.



Neste sentido, passaremos a investigar o comportamento da senóide, mediante estudos paramétricos da função.

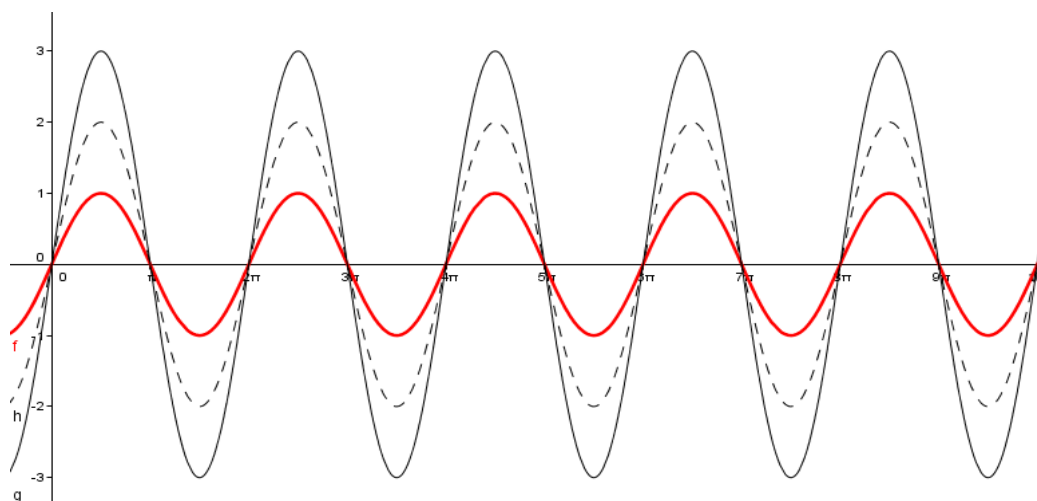
Parâmetro a

A utilização de software específico (GeoGebra) para tal atividade é bastante relevante, bem como o emprego auxiliar de outras funções para determinar o valor dos parâmetros.

Amplitude $f(x) = a \text{sen}x$

$$f(x) = \text{sen}x, \quad g(x) = 2\text{sen}x \quad \text{e} \quad h(x) = 3\text{sen}x$$

Figura 12: Influência do parâmetro a na função $f(x) = a \text{sen}x$.



Visualizando os gráficos das funções observamos variações quanto à amplitude através da mudança do parâmetro a . Na trigonometria a amplitude é obtida dividindo por dois a diferença entre o valor máximo e mínimo da função.

$$\text{Em } f(x) = \text{sen}x, \quad \text{Im} = [-1, 1] \text{ e amplitude} = \frac{1 - (-1)}{2} = 1;$$

Em $g(x) = 2\text{sen}x$, $\text{Im} = [-2, 2]$ e amplitude $= \frac{2 - (-2)}{2} = 2$;

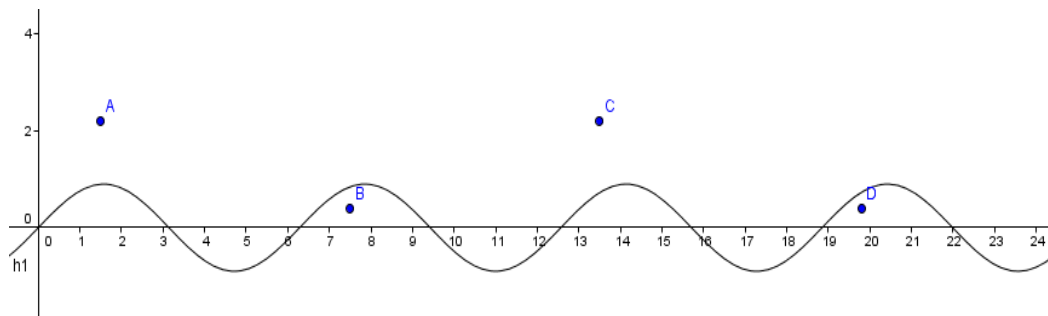
Em $h(x) = 3\text{sen}x$, $\text{Im} = [-3, 3]$ e amplitude $= \frac{3 - (-3)}{2} = 3$;

Portanto, espera-se que o aluno compreenda que o parâmetro a identifica a amplitude, que são pontos de máximo e de mínimo da função, ou seja, altera o valor de y de modo que, enquanto a imagem de $f(x) = \text{sen}x$ é $[-1, 1]$, a imagem da função $f(x) = a\text{sen}x$ é $[-a, a]$.

Na situação real temos a imagem $[0.4, 2.2]$, fazemos a média aritmética entre a amplitude máxima e a amplitude mínima, obtendo assim a amplitude da nossa situação real:

$\frac{2,2 - 0,4}{2} = \frac{1,8}{2} = 0,9$, daí nossa função até o momento é $h(t) = 0,9\text{sen}t$, cuja representação encontra-se abaixo;

Figura 13: Grafico da função $h(t) = 0,9\text{sen}t$.

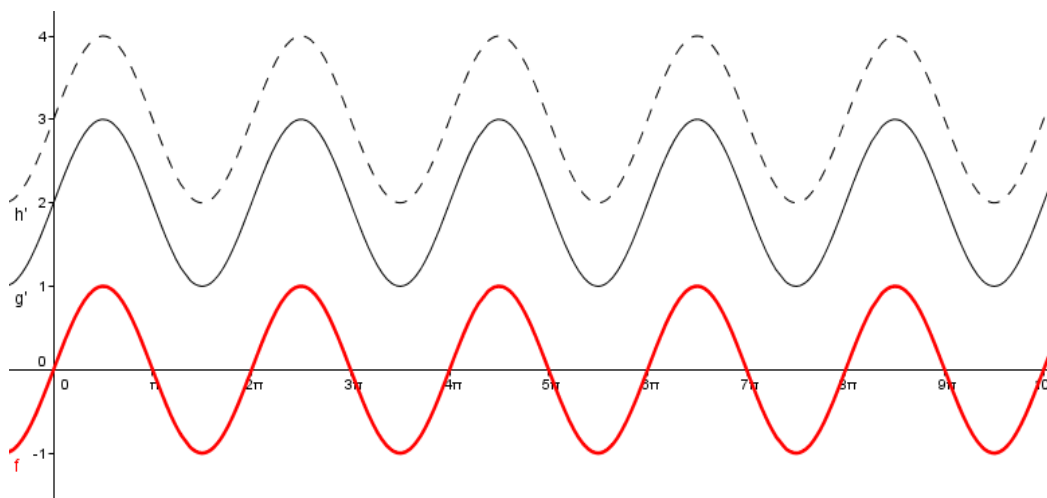


Mediante a representação gráfica é visível que a função ainda não contempla graficamente a situação real. Então, devemos realizar outra análise paramétrica da função de tal forma que o ajuste conveniente dos dados vislumbre a função $h(t)$.

Parâmetro b

A partir da investigação de um parâmetro b , que é aquele que somamos a função $f(x)$. A partir dele obtemos as seguintes funções: $f(x) = \text{sen}x$, $g(x) = 2 + \text{sen}x$ e $h(x) = 3 + \text{sen}x$, quando b é 1, 2 e 3, respectivamente, e assim identificamos a influência dos valores somados ao $\text{sen}x$, ou seja, os valores de b em $f(x) = b + \text{sen}x$ conforme figura abaixo:

Figura 14: Investigação do parâmetro b da função $f(x) = b + \text{sen}x$.



Em $f(x) = \text{sen}x$, $\text{Im} = [-1, 1]$;

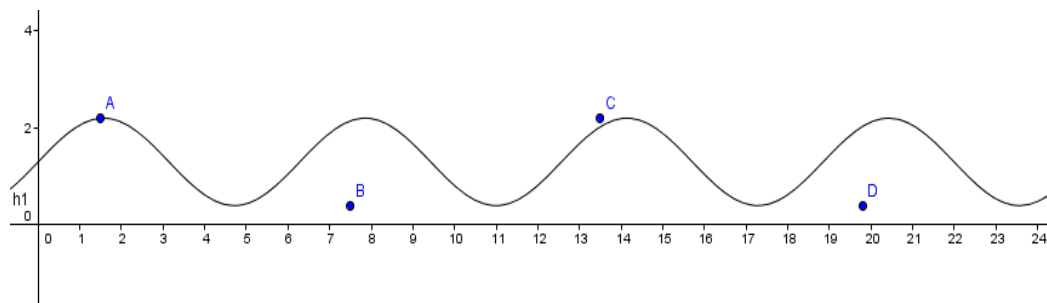
Em $g(x) = 2 + \text{sen}x$, $\text{Im} = [1, 3]$;

Em $h(x) = 3 + \text{sen}x$, $\text{Im} = [2, 4]$;

Observamos que o valor b determina o deslocamento vertical da função $f(x) = \text{sen}x$, de modo que enquanto a imagem de $f(x) = \text{sen}x$ é $[-1, 1]$, a imagem da função $f(x) = b + \text{sen}x$ corresponde a $[-1+b, 1+b]$.

Para nossa situação devemos identificar um b em $h(t) = b + 0,9\text{sen}t$ de tal forma que a imagem corresponda ao intervalo $[0,4, 2,2]$, que contempla a medida das alturas das marés, portanto devemos encontrar b em $h(t) = b + 0,9\text{sen}t$ de tal modo que $[-0,9+b, 0,9+b] = [0,4, 2,2]$: $-0,9+b = 0,4$ e $0,9+b = 2,2$, onde $b = 1,3$. Portanto, por enquanto a função da investigação é $h(t) = 1,3 + 0,9\text{sen}t$, e assim podemos verificar o comportamento gráfico abaixo:

Figura 15: Gráfico da função $h(t) = 1,3 + 0,9\text{sen}t$.



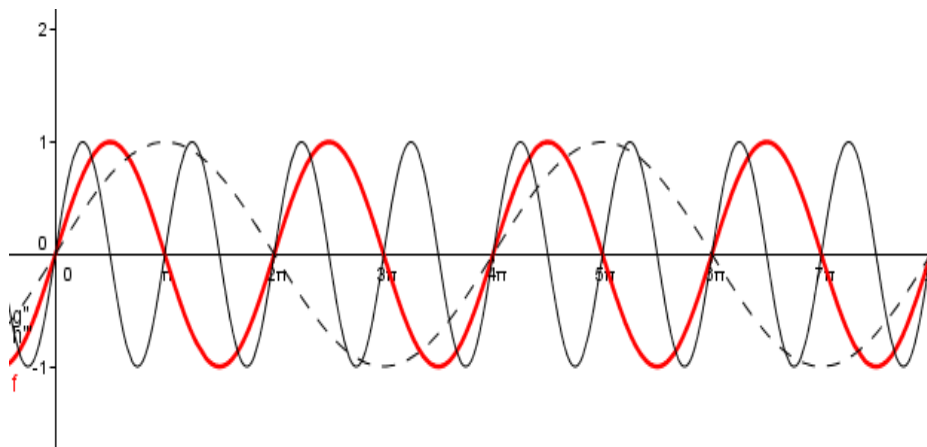
No entanto o gráfico ainda não está coerente com a situação real, pois os pontos que ditam a amplitude da maré ainda não contemplam pontos de máximo e mínimo da função estudado. Portanto faremos novas alterações nos seus parâmetros. É importante notarmos que os parâmetros a e b estão relacionados com a imagem da função.

Parâmetro c

Seguiremos agora uma nova investigação em relação aos parâmetros que exercem influência no comportamento gráfico da função. O termo multiplicativo da variável x , $f(x) = \text{sen}(cx)$. A fim de verificar o comportamento gráfico utilizaremos as seguintes funções:

$f(x) = \text{sen}x$, $g(x) = \text{sen}(2x)$ e $h(x) = \text{sen}(\frac{1}{2}x)$, verificando as modificações do gráfico em relação a $f(x) = \text{sen}(cx)$.

Figura 16: Investigação do parâmetro C da função $f(x) = \text{sen}(cx)$.



Verificamos que o parâmetro c está relacionado com o “esticar” e o “encolher” em relação ao eixo x , e assim influenciando apenas no período da função. E este período é o

$$f(x) = f(x - p),$$

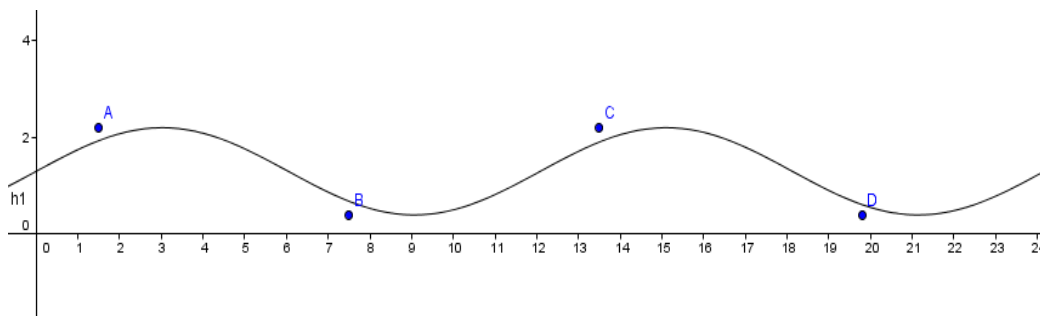
$$p = \frac{2\pi}{|c|}.$$

$$12,016 = \frac{2\pi}{|c|} \rightarrow c = \frac{2\pi}{12,016} \rightarrow c = \frac{\pi}{6,008}$$

$$h(t) = 1,3 + 0,9 \text{sen}\left(\frac{\pi}{6,008}t\right)$$

Sendo sua representação gráfica mostrada a seguir:

Figura 17: Gráfico da função $h(t) = 1,3 + 0,9\text{sen}(\frac{\pi}{6,008}t)$.



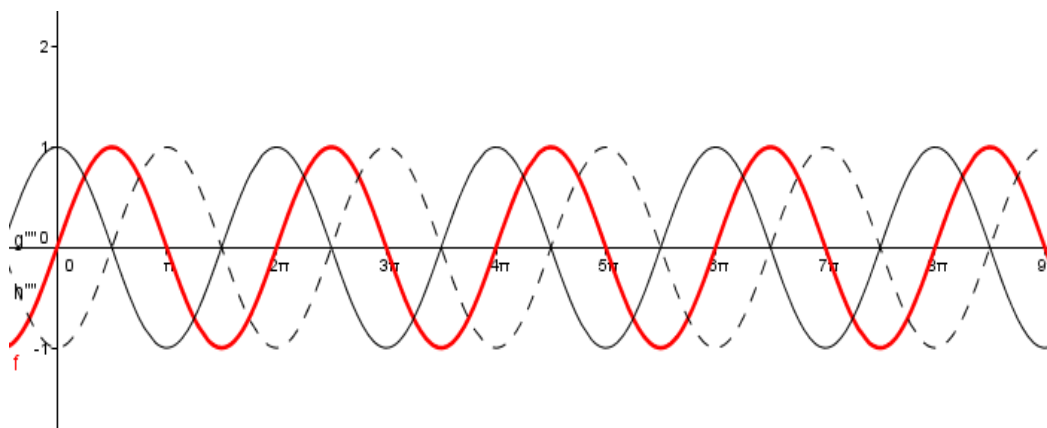
Entretanto o gráfico da função ainda não apresenta a situação real.

Parâmetro d

Observamos a possibilidade de mais uma investigação de outro parâmetro da função trigonométrica, isto é, aquele que se soma à variável x antes de calcular o seno.

Então, seguiremos o processo investigativo mais uma vez, construindo os gráficos das seguintes funções: $f(x) = \text{sen}x$, $g(x) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ e $h(x) = \text{sen}(x - \pi)$. Vejamos o comportamento do gráfico com adição do parâmetro d , na figura abaixo:

Figura 18: Investigação do parâmetro d da função $f(x) = \text{sen}(x + d)$.



Observamos, portanto, que não há alteração na imagem da função: o que existe é apenas um deslocamento horizontal tendo como referencial $f(x) = \text{sen}(x)$

$$h(t) = 1,3 + 0,9\text{sen}(\frac{\pi}{6,008}t + d)$$

$$2,2 = 1,3 + 0,9 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6,008}\left(3 + \frac{35}{60} + d\right)\right)$$

$$0,9 = 0,9 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6,008}\left(3 + \frac{35}{60} + d\right)\right)$$

$$1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6,008}\left(3 + \frac{35}{60} + d\right)\right)$$

$$1 = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{6,008} + \frac{35\pi}{364,8} + d\right)$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{6,008} + \frac{35\pi}{364,8} + d\right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{578\pi}{2218} + d$$

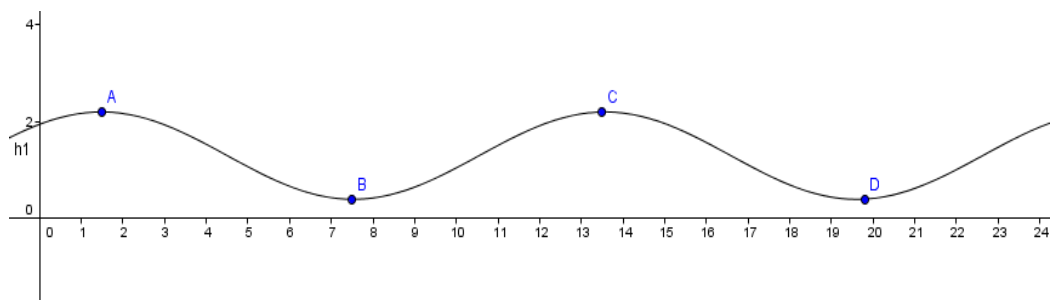
$$d = \frac{\pi}{2} - \frac{578\pi}{2218} = \frac{265,5\pi}{1109}$$

4º Passo: Modelo matemático da situação

Neste passo a Matemática empregada para o sucesso da investigação foi a função trigonométrica seno e a resolução de uma equação trigonométrica.

Portanto o modelo matemático que representa a situação das marés no dia 27/07/2014 no litoral Pessoense, para t dado em horas, $t \in \mathbb{R}$ e $0 \leq t \leq 24$, está mostrado a seguir:

Figura 19: Gráfico da função $h(t) = 1,3 + 0,9 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6,008} \cdot t + \frac{265\pi}{1109}\right)$



Portanto agora basta apenas validar o Modelo através de outras amplitudes e/ ou horários e assim encontrar a incógnita desejada, comparando com resultados mostrados ao longo do dia.

Com a utilização do software GeoGebra que é um programa gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e a aprendizagem da matemática nos vários níveis de

ensino. Contudo foi bastante relevante a aplicação desta ferramenta para obtenção dos gráficos a partir das funções investigadas, bem com os parâmetros envolvidos. E assim realizamos várias representações gráficas que nos deram suporte norteadores no estudo do modelo apresentado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho aborda e evidencia a possibilidade da inserção da Modelagem Matemática no ambiente escolar elencando vários pontos favoráveis a esta metodologia, que tem, segundo (Biembegut), como procedimentos a inteiração, a matematização e a elaboração de um modelo matemático, com objetivo de obter resolução para uma situação inicial. Além disso, um fator primordial e imprescindível é a motivação (facilita imensamente o processo cognitivo durante a atividade de modelagem) para trabalhar em sala de aula com situações do cotidiano, durante a aplicação destes procedimentos pode-se alcançar na Educação Matemática um ensino de qualidade contemplando justamente o exposto nos PCN no que diz respeito à formação intelectual do indivíduo vislumbrando os interesses da sociedade.

Portanto, devemos possibilitar aos alunos uma aprendizagem significativa que contribua para transformá-los em cidadãos sociocríticos mediado pela educação. Assim a Modelagem assume um papel importante neste contexto, pois a partir dela podemos observar pontos de extrema relevância, seja no ambiente educacional (ensino e aprendizagem) ou no ambiente científico investigativo, possibilitando assim mais uma evidência para a aplicação desta metodologia.

Todos esses fatores apontam na direção da modelagem matemática como um processo rico e criativo, que deve ser valorizado pelos múltiplos aspectos favorecidos por esta prática educativa. Desta forma, a modelagem matemática é indicada para tentar superar a crise no ensino, pois é capaz de responder a pergunta que tanto ocorre no processo de ensino da matemática; Porque tenho que aprender isso? Apresentando uma forma de construção de conhecimento que flui de maneira natural e não por imposição, facilitando o entendimento e as relações com o cotidiano do aluno. Segundo CALDEIRA (1992):

“O que é importante acentuar é que os conceitos aparecem da necessidade e não são impostos sem nenhum sentido de ser. Talvez essa seja a principal característica da dinâmica deste trabalho.”

Neste sentido, a proposta trabalhada nos permitiu reconhecer e analisar uma situação real do cotidiano, envolvendo a Modelagem Matemática na Educação Matemática e a interdisciplinaridade em torno da problemática apresentada, portanto, mediante as investigações identificamos a Matemática envolvida no movimento das marés, através de hipóteses e variáveis, bem como a utilização do procedimento da Modelagem para conseguir representar através da trigonometria os estudos paramétricos da função trigonométrica seno, e

assim elaborar um modelo matemático a descrever o comportamento da amplitude do mar ao longo de determinado dia. Além do mais esta atividade traz uma nova modalidade na prática de ensino e aprendizagem, tanto para o aluno quanto para o professor.

Destacamos também a interação entre as disciplinas envolvidas no tema e a suas contribuições oferecendo aos alunos uma visão diferente da Matemática e como isso uma aprendizagem significativa.

6 REFERÊNCIAS

- [1] ALMEIDA, Lourdes Werle; SILVA, Karina Pessôa; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação matemática**. São Paulo: Contexto, 2012.
- [2] BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? *Veritati*, n. 4, p. 73-80, 2004.
- [3] BARROSO, Juliana Mutsubara; Conexões com a Matemática São Paulo, moderna, 2010.
- [4] BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2011.
- [5] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2006. 389 p.
- [6] BEAN, D. W. Modelagem: uma conceituação criativa da realidade. In: Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, 4, 2009, Ouro Preto 4, Ouro Preto – MG. **Anais...** Universidade Federal de Ouro Preto – Ouro Preto, abril 2009b. p. 90-104
- [7] BIEMBEGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed., São Paulo: Contexto, 2013.
- [8] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- [9] BUENO, Vilma Candida, Concepções de Modelagem matemática e subsídios para a educação matemática: Quatro maneiras de compreendê-la no cenário brasileiro. UFMG, 2011, Dissertação de mestrado, <www.ppgedmat.ufop.br> Acesso em 05 de junho de 2014.
- [10] BURAK, D Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. In: **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, 2010, p. 10-27, Vol. 1, No. 1, 1
- [11] BURAK, D. **Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. Campinas-SP, 1992. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.
- [12] CALDEIRA, A.D. Uma Proposta Pedagógica em Etnomatemática na Zona Rural da Fazenda Angélica em Rio Claro. Rio Claro:UNESP, 1992. Dissertação (Mestrado) – igce, Universidade Estadual Paulista.
- [13] CHARLOT, B. Da relação com o saber - Elementos para uma teoria, trad. Bruno Magne, Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

- [14] D'AMBROSIO, U. **Da realidade a ação: reflexões sobre educação e matemática**. 2ª edição Campinas: Unicamp; São Paulo: SUMMUS, 1986, 115p.
- [15] GONÇALVES, Arthur. A modelagem como caminho para “Fazer Matemática” na sala de aula. Disponível em: <www.ufpa.br> Acesso em 01 de julho de 2014.
- [16] KENNEDY, Edward S. M. **História da trigonometria**. São Paulo: Atual, 1992.
- [17] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 3**. São Paulo: atual, 2004.
- [18] LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio – volume 1 – 9. Ed.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [19] MEYER, João Frederico da Costa de Azevedo; CALDEIRA, Ademir Donizete; MALHEIRO, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.
- [20] TABUA DE MARÉS, **Tabua de marés de João Pessoa**. Disponível em <<http://www.tabuademares.com/br/paraiba/joao-pessoa>>. Acesso em 10/08/2014.
- [21] SELLER, Morgana. Modelagem matemática para iniciação científica. Disponível em: <www.lume.ufrgs.br> Acesso em 10 de julho de 2014.
- [22] SKVSMOSE, O. **Educação matemática crítica: A questão da democracia**. Campinas, SP: Papirus, 2001, 3ª ed. 160 p. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).
- [23] MARTINS, Ana Regina, “O uso da modelagem matemática em sala de aula na universidade”, UFMG, 2007, monografia, <www.mat.ufmg.br> Acesso em 13 de julho de 2014.
- [24] KEITEL, Christine; RUTHVEN, Kenneth. Learning from computers: mathematics education and technology. Berlin: Springer, 1993. 338 p.
- [25] KAISER, G.; SRIRAMAN, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 3, p.302-310.

ANEXOS

ANEXO 1 – TEXTO SOBRE AS MARÉS E A TRIGONOMETRIA

As Marés e a Trigonometria

Marés são movimentos periódicos de rebaixamento e elevação das grandes massas de água formadas por oceanos, mares e lagos, provocados pela força gravitacional da Lua e do Sol sobre a superfície terrestre. Quase imperceptíveis nos pequenos lagos, as marés assumem grandes proporções nos mares e nos oceanos.

Contrariando a crença popular de que a Lua “puxa para cima” a água dos mares e oceanos, essa atração só consegue deslocar lateralmente as grandes massas fluídas, ocasionando as marés. Elas ocorrem duas vezes por dia, com duração de seis horas e doze minutos para cada movimento (enchente e vazante).

A principal determinante da maior ou menor amplitude das marés é a combinação do movimento de rotação terrestre com o da revolução da Lua em torno da Terra, mas a situação geográfica e as peculiaridades topográficas de cada região também podem exercer influência. Em algumas áreas do oceano Pacífico as marés são medidas em centímetros, contrastando com as altas marcas alcançadas em outras, onde as diferenças são de metros utilizando uma régua graduada ou marégrafo. Quando o mar atinge o seu nível mais alto, dá-se a isso o nome de maré alta, maré cheia ou preamar; e quando está no mais baixo, dizemos que é a maré baixa ou baixa-mar. As diferentes etapas ocorridas ao longo dessas variações são definidas como:

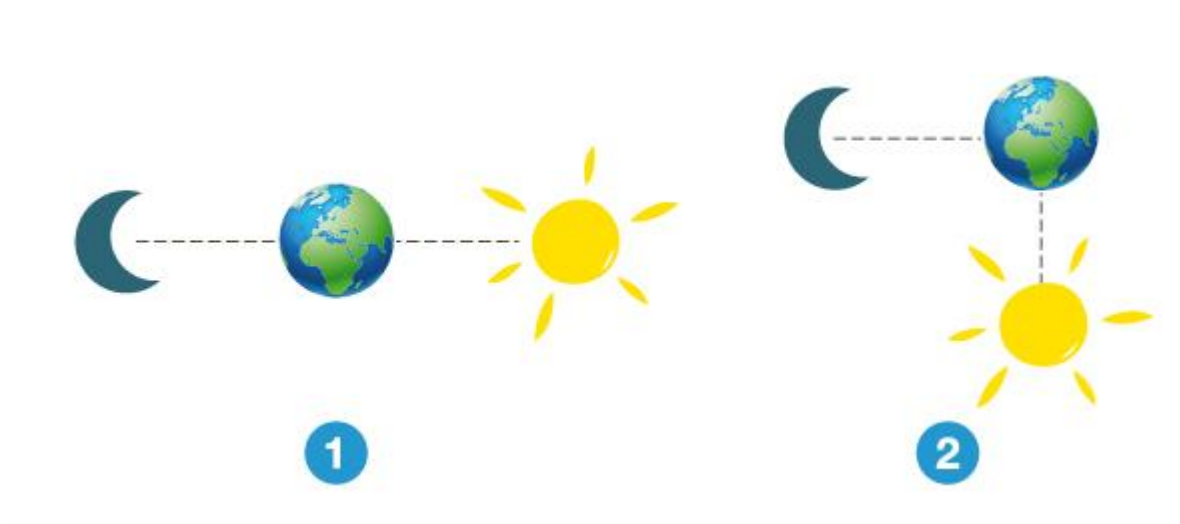
- **Preamar** - nível máximo de uma maré cheia.
- **Baixa-mar** - Nível mínimo de uma maré vazante;
- **Estofo** - Ocorre entre marés, um curto período sem qualquer alteração na altura de nível;
- **Enchente** - Período entre uma baixa-mar e uma preamar, quando a altura da maré aumenta;
- **Vazante** - Período entre uma preamar e uma baixa-mar, quando a altura da maré diminui;
- **Altura da Maré** - Altura do nível da água, num dado momento, em relação ao plano do zero hidrográfico (é a altitude de referência a partir da qual são medidas as profundidades a partir do nível médio das águas do mar);
- **Elevação da Maré** - Altitude da superfície livre da água, num dado momento, acima do nível médio do mar;
- **Amplitude de Marés** - Variação do nível das águas entre uma preamar e uma baixa-mar imediatamente anterior ou posterior;

Curiosidade: A amplitude da maré difere dia após dia conforme a posição do Sol e da Lua. Quando ambos se colocam numa mesma linha em relação à Terra, como acontece na Lua Cheia e Nova, a maré fica mais alta do que o normal e é chamada de maré de Sizígia, ou maré de Águas-Vivas. Quando o Sol e a Lua formam com a Terra um ângulo reto, como quando a Lua está em quarto crescente ou quarto minguante, a maré é mais baixa que o normal, sendo chamada maré de Quadratura, ou maré de Águas-Mortas. A própria formação da costa marítima produz também uma grande diferença na amplitude da maré. Nos estuários e baías com o formato de funil, a amplitude pode ser muito alta. A forma, tamanho e profundidade dos mares e oceanos provocam diferenças no modo de agir da maré.

Para uma determinada maré, a altura A medida em metros, acima do nível médio, é dada, aproximadamente, pela formula $A(t) = 4\text{sen}(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4})$, em que t é o tempo medido em horas.

Adaptado de Modelagem matemática na educação básica. São Paulo: Contexto, 2013.

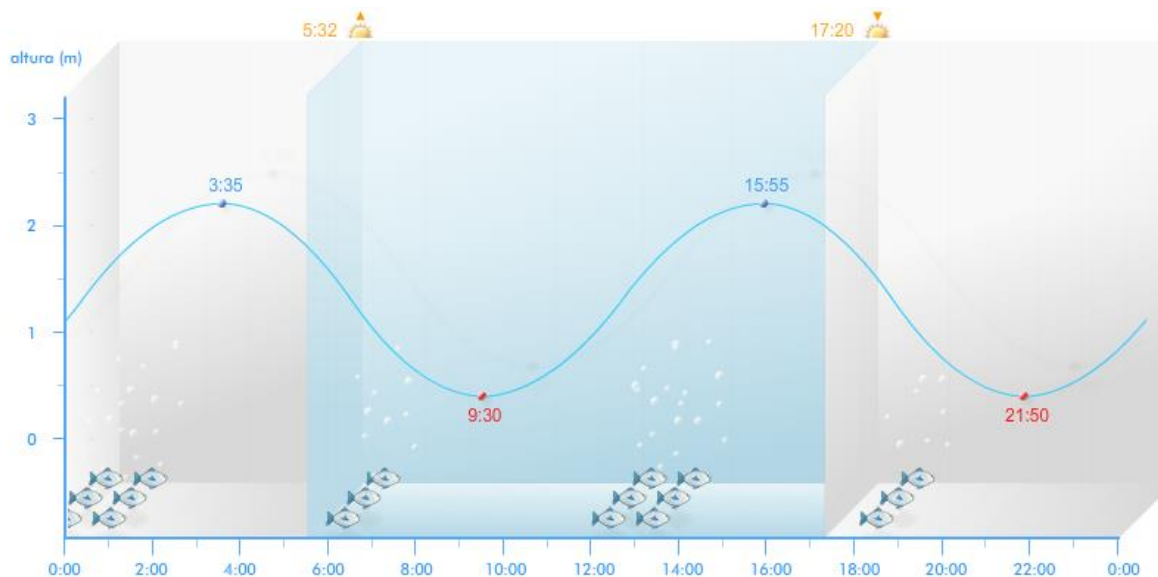
Figura 20: Conjugado das forças de gravitação da Lua e do Sol.



Fonte: < <http://www.tribord.com/pt/deslize/fichas-praticas/o-fenomeno-das-mares>>. Acessado em 10 de agosto de 2014.

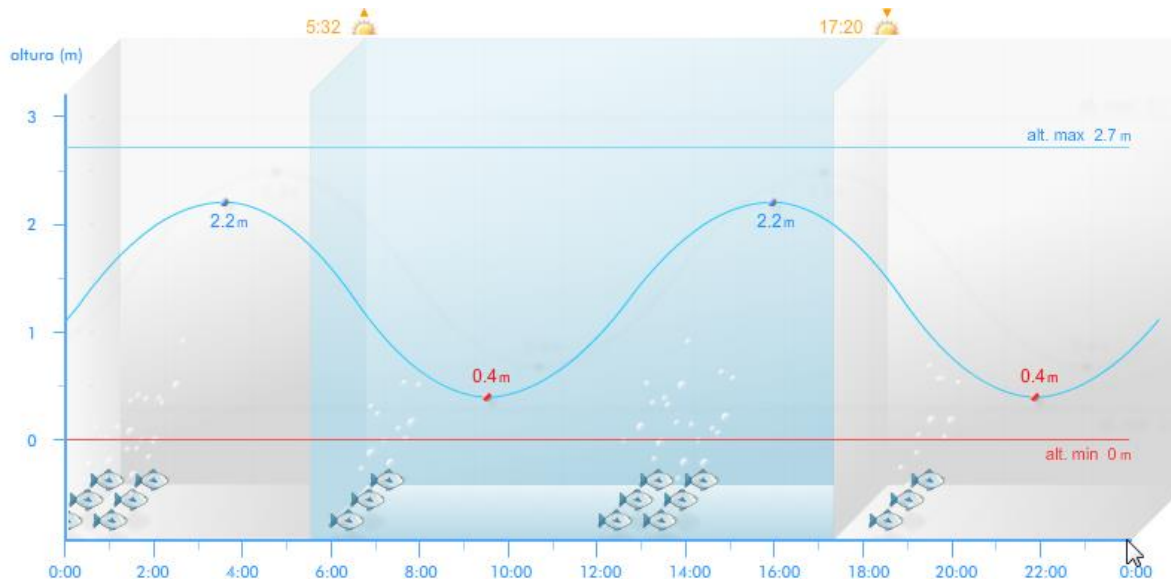
ANEXO 2 – GRÁFICOS REFERENTE AO COMPORTAMENTO DA MARÉ NO DIA 27/08/2014.

Figura 21: Comportamento gráfico das marés 1



Disponível em: <http://www.tabuademares.com/br/paraiba/joao-pessoa> Acesso em 27 de julho de 2014.

Figura 22: Comportamento gráfico das marés 2



Disponível em: <http://www.tabuademares.com/br/paraiba/joao-pessoa> Acesso em 27 de julho de 2014.